Евгения Элькина

Комплексные числа

(Методическое пособие)

Решение уравнений вида

$$x^n + a = 0 \text{ и } a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0, \; a_n \neq 0$$

Рекомендовано Ученым советом Государственной академии промышленного менеджмента имени Н. П. Пастухова в качестве учебно-методического пособия слушателям курсов повышения квалификации, магистрантам и аспирантам

Ярославль, 2021

УДК 51
ББК 22.1
Э53

Рекомендовано к печати Ученым советом АНО НИПИ «Кадастр»

Рецензенты:

ФГБОУ ДПО «Государственная академия промышленного менеджмента имени Н. П. Пастухова»;

Кашенков Ю. С., канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой гидротехнического и дорожного строительства Института архитектуры и дизайна Ярославского государственного технического университета;

Зюзикова Ю. М., директор МАОУ «Лицей города Троицка» г. Москвы, учитель математики.

Элькина Е.М.

Комплексные числа. *Методическое пособие.* – Ярославль: АНО НИПИ «Кадастр», 2021. – 36 с.

Пособие дополняет публикацию автора «Графики функций. Ускоренный курс тригонометрии». Изложенный материал дает представление о действительных и мнимых числах, алгебраической, геометрической и тригонометрической формах комплексного числа и о математических действиях с ними.
Пособие полезно слушателям курсов повышения квалификации, всем, кому требуется в сжатые сроки вспомнить ранее изученный материал: абитуриентам, студентам, магистрантам и др. Оно может быть интересным для учащихся старших классов, учителей и всех любителей математики.

ISBN 978-5-902637-32-5

Оглавление

Как считали наши далёкие-далёкие предки? Как обходились без тех чисел, которыми мы пользуемся сейчас?

Создание нашей современной системы счисления проходило медленно и трудно. С чего начинался счёт?

Пастух принимает от хозяина определённое количество коров. Он должен сохранить их и вернуть хозяину столько же. Что он делает? Он собирает столько камушков, сколько ему доверили коров, и хранит их. На современном языке пастух установил взаимно-однозначное соответствие между двумя множествами. Затем способы ведения счёта начали совершенствоваться. Использовалась лучина, та самая, которую приспособили для освещения. Делали одинаковое количество зарубок с двух сторон, а затем её расщепляли: одна половина пастуху, другая – хозяину коров. (Уважаемый Читатель, извините меня за примитивность изложения. На самом деле всё это не так просто. Это целая большая история. Те, кого она заинтересует, всегда найдут достаточно литературы, чтобы удовлетворить свою любознательность).

Следующий этап – лучина заменяется верёвкой, на которой завязываются узелки. От этого вида счёта до нас дошла поговорка: «Завязать узелок на память». Числовая ось – на вид весьма скромное «сооружение». Но за этой простотой скрывается целая история развития науки о числе. Не напоминает ли числовая ось верёвку с узелками? Только узелки (числа) отмечены на равном расстоянии друг от друга.

Когда начала зарождаться письменность, количество предметов обозначалось иероглифами, клинописью, римскими цифрами. У славян алфавит, кроме своего прямого назначения, использовался и для обозначения количества предметов. Считали дюжинами (по 12 штук), пятками (по 5 штук) и т. д. Наша система счисления десятичная, мы считаем по 10 штук (один десяток, два десятка, и т. д.). Для записи любого числа в десятичной системе счисления используется десять цифр: 0, 1, 2, ..., 9.

Например:

$308_{10} = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8$

По аналогии можно записать любое число в любой системе счисления. Возьмем, например, за основу число 5.

$3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^1 + 4 = 324_5$

В этой системе счисления для записи любого числа требуется пять цифр: 1, 2, 3, 4, 0.

Для двоичной системы счисления нужны 0 и 1. Посмотрим, как будут записываться числа 3, 5, 13 в двоичной системе счисления.

$3_{10} = 1 \cdot 2^1 + 1 = 11_2$

$5_{10} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 101_2$

$13_{10} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 1101_2$

Читать:

3_{10} – три в десятичной системе счисления;

11_2 – три в двоичной системе счисления.

На двоичной системе счисления основана компьютерная техника.

1. Множество натуральных чисел

Числа 0, 1, 2, ... составляют множество натуральных чисел.[1]

Пример 1. Решить уравнение: $x + 3 = 8$ (1)

$x = 5$ – корень уравнения (1)

Число 5 принадлежит множеству натуральных чисел.

Вывод: уравнение (1) РАЗРЕШИМО на множестве натуральных чисел.

Пример 2. Решить уравнение $x + 8 = 3$ (2)

$x = -5$ – корень уравнения (2)

[1] В школьных учебниках 0 не является натуральным числом, но среди математиков существуют две точки зрения: в зависимости от подхода к определению натуральных чисел, 0 включается или исключается из этого множества.

Число – 5 не принадлежит множеству натуральных чисел.

Вывод: уравнение (2) НЕ РАЗРЕШИМО на множестве натуральных чисел.

Отсюда возникает необходимость расширения множества натуральных чисел.

0, 1, 2, 3, ...
+ -1, -2, -3, -4, ...
Целые числа: ... , -5, -4,-3,-2, -1, 0, 1,

Множество НАТУРАЛЬНЫХ чисел расширили числами, ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ натуральным. Получили множество ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ.

На множестве ЦЕЛЫХ чисел уравнение (2) – РАЗРЕШИМО.

2. Действительные числа

(1) Рациональные числа.

Пример 3. Решить уравнение: $2x = 5$ (3)

$x = \frac{5}{2}$ – корень уравнения (3), $\frac{5}{2}$ число не принадлежит множеству целых чисел.

Вывод: уравнение (3) НЕ РАЗРЕШИМО на множестве ЦЕЛЫХ чисел.

Определение. Числа, которые могут быть представлены в виде выражения $\frac{m}{n}$, где $n \neq 0$, а числа m и n являются целыми, называются РАЦИОНАЛЬНЫМИ.

$$(\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots) + \left(\frac{10}{1}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \ldots\right) = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

Вывод: уравнение (3) РАЗРЕШИМО на множестве рациональных чисел.

Замечание. Условие $n \neq 0$ является значительным: **ДЕЛИТЬ НА НОЛЬ НЕЛЬЗЯ!**

Что может произойти, если всё же разделить на ноль?

$$25 - 25 = 25 - 25 \qquad a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$
$$5\,(5 - 5) = (5 + 5)\,(5 - 5) \qquad a\,(a - a) = (a + a)\,(a - a)$$
$$5 = 5 + 5 \qquad a = a + a$$

Обе части равенств сократили на одинаковые выражения: 5 – 5, $a - a$.

$$5 = 10 \qquad a = 2a$$
$$1 = 2! \qquad 1 = 2!$$

Пример 4. Решить уравнение: $x^2 - 2 = 0$ (4)

$x = +\sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$ – корни уравнения (4).

Числа $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не принадлежат рациональным числам.

Вывод: уравнение (4) НЕ РАЗРЕШИМО на множестве рациональных чисел.

(2) Иррациональные числа.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, ... – числа иррациональные.

Рассмотрим существенное различие между числами рациональными и иррациональными. Любое рациональное число может быть представлено в виде десятичной бесконечной ПЕРИОДИЧЕСКОЙ дроби, и наоборот, любая десятичная бесконечная периодическая дробь может быть представлена в виде РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА.

$$\frac{1}{2} = 0{,}500... = 0{,}5\bar{0} \quad (1) \qquad 0{,}5\bar{0} = \frac{50-5}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}5\bar{0} \quad (2) \qquad 0{,}\bar{6} = \frac{66-6}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8\bar{3} \quad (3) \qquad 0{,}8\bar{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{61}{75} = 0{,}81333... = 0{,}81\bar{3} \quad (4) \qquad 0{,}81\bar{3} = \frac{813-81}{900} = \frac{61}{75}$$

<u>Правило обращения бесконечной десятичной **периодической** дроби в обыкновенную:</u>

Числитель: из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящего до первого периода.

Знаменатель: цифру 9 написать столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр до периода.

$\sqrt{2}$ = 1,1442135... – бесконечная десятичная **непериодическая** дробь, поэтому не может быть представлена в виде рационального числа.

$\sqrt{2}$ – число **иррациональное**.

Множество рациональных и иррациональных чисел составляет множество действительных чисел.

3. Кратко о длинной истории числа π

Первое приближение числа π дал Архимед из Сиракуз (287–212 гг. до н.э.):

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{10}{70}$$

Позднее Клавдий (87–165 гг.) определил π как число 3,141666. Андриан Меций нашёл значение числа π, верное до седьмого десятичного знака. Людольф ван Цейлен получил число π с точностью до 20-го десятичного знака. Эта работа была проделана математиками в связи с вычислением длины окружности. Автор нашёл целесообразным рассказать историю числа π, чтобы современный Читатель мог хотя бы чуть-чуть представить тот путь, который прошли математики, чтобы вывести формулу $C = 2\pi r$.

4. Комплексные числа

4.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Пример 5. Решить уравнение: $x^2 + 2 = 0$ (5)

x = ± $\sqrt{-2}$ корни уравнения (5)

Числа $\pm\sqrt{-2}$ не принадлежат множеству действительных чисел.

Появилось новое число, а именно $\sqrt{-1}$ ($\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2}$).

Обозначим $\sqrt{-1}$ через i и назовём его **мнимой единицей**: $\sqrt{-1} = i$, кроме того, следует считать, что $i^2 = -1$.

Замечание. Корни нечётной степени из отрицательного числа принадлежат множеству действительных чисел.

Например. $\sqrt[3]{-27} = -3$, т. к. $(-3)^3 = -27$

Пример 6. Решить уравнение: $x^2 + x + 1 = 0$ (6)

Решение: $x + \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Пример 7. Решить уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 0$ (7)

Решение: $x = 2 \pm 1$, $x_1 = 3 + 0 \cdot i$, $x_2 = 1 + 0 \cdot i$

Проанализируем полученные результаты.

1. Найденные корни уравнений (6) и (7) можно представить в виде $z = a + bi$, где a и b – действительные числа.
2. Наличие мнимой единицы в записи корней указывает на то, что числа принадлежат множеству комплексных чисел.
3. Знак (+) не следует понимать, как знак сложения в обычном смысле. В данном случае знак плюс указывает, что обе части выражения $a + bi$ следует рассматривать в комплекте.

   $z = a + bi$ – **алгебраическая форма комплексного числа**.

a – действительная часть комплексного числа, bi – мнимая часть комплексного числа, b – коэффициент при мнимой единице.

4. Действительные корни уравнения (7) демонстрируют возможность представить любое действительное число как комплексное:

   $2 = 2 + 0 \cdot i$, $3 = 3 + 0 \cdot i$.

Замечание. Следует отметить общее положение: когда идёт процесс расширения некоторого множества чисел, то любое число, взятое из исходного множества, органично входит в расширенное.

$5 = \frac{20}{4}$ – целое число 5 представлено в виде рационального $\frac{m}{n}$, n ≠ 0.

4.2 Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Для всех множеств все действия над числами осуществляются по одним и тем же законам.

Коммутативный закон: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$

Ассоциативный закон: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Дистрибутивный закон: $(a + b) \cdot c = ac + bc$

1. Равенство комплексных чисел.

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Замечание. Для комплексных чисел не существует понятия больше или меньше, т.е. комплексные числа нельзя сравнивать по величине.

Два комплексных z_1 и z_2 называются сопряжёнными, если $z_1 = a + bi$, $z_2 = a - bi$

где a и b – действительные числа.

По аналогии: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a^2 - b^2$ – произведение двух сопряжённых иррациональных множителя есть число рациональное.

Замечание. На множестве действительных чисел выражение $a^2 + b^2$ не разлагается на множители. На множестве комплексных чисел $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$.

2. Сложение и вычитание комплексных чисел.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т.е. при сложении комплексных чисел складываются их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.

Аналогично выполняется вычитание:

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

3. Деление выполняется по тем же правилам, что и деление иррациональных выражений (знаменатель умножается на сопряжённый множитель):

$$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)\,(a+bi)} = \frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}$$

Упражнение 1. Выполнить действия:

1) $К = \frac{3-2i}{3+2i}$;

2) $М = \frac{3-2i}{3+2i} - \frac{3+2i}{3-2i}$.

Решение.

1) $К = \frac{3-2i}{3+2i} = \frac{(3-2i)^2}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{9-2\cdot 3\cdot 2i+(2i)^2}{3^2-(2i)^2} = \frac{9-12i-4}{9+4} = \frac{9-12i-4}{13} =$

$= \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$

2) $М = \frac{3-2i}{3+2i} - \frac{3+2i}{3-2i} = \frac{(3-2i)^2-(3+2i)^2}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(3-2i+3+2i)\,(3-2i-3-2i)}{9+4} =$

$= \frac{6\cdot(-4i)}{13} = -\frac{24}{13}i$

Упражнение 2. Упростить:

1) i^3;

2) i^4;

3) i^{23};

4) $(-i)^{18}$;

5) $\frac{i^5}{i^3}$;

6) $(1+i)^3$;

7) $(1+i)^4$.

Решение:

1) $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;

2) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$;

3) $i^{23} = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = -i$;

4) $(-i)^{18} = i^{18} = -1$;

5) -1;

6) $(1 + i)^3 = (1 + i)^2 (1 + i) = 2i (1 + i) = -2 + 2i$;

7) $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$.

Упражнение 3. Решить уравнение: $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{5} = \frac{-1 \pm 2i}{5}$$

Замечание. Если алгебраическое уравнение имеет комплексные корни, то они попарно сопряжённые: $x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; $x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

4.3 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

а) Множество действительных чисел.

Не вызывает затруднений отметить на числовой оси ОХ точки, соответствующие рациональным числам, т. е. целым числам: положительным и отрицательным, а также любой дроби: как обыкновенной, так и десятичной. Покажем, что на оси ОХ располагаются и иррациональные числа, например, $\sqrt{2}$.

1-й способ. Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

Построение.

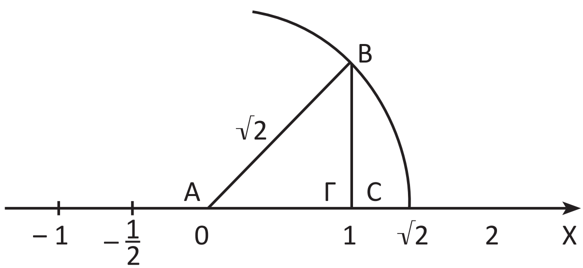

Рис. 1

1) На отрезке АС, длина которого равна 1 ед. масштаба, строим прямоугольный треугольник АВС, где $|BC| = |AC| = 1$, тогда по теореме Пифагора гипотенуза $|AB| = \sqrt{2}$.

2) Начало координат (точку А) примем за центр окружности и радиусом, равным $AB = \sqrt{2}$; проводим окружность до пересечения с осью ОХ в точке М. Точка М соответствует числу $\sqrt{2}$ (рис.1).

2-й способ. Теорема. Перпендикуляр, проведённый из любой точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками диаметра (рис.2).

Построение.

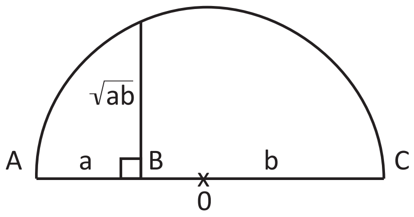

Рис. 2

На отрезке $|AB| = |AO| + |OB| = 1 + 2$ (ед. масштаба) строим полуокружность $R = \frac{1}{2}|AB|$.

Из точки О, как из центра, проводим дугу $R_1 = \sqrt{2}$ до пересечения с осью ОХ. На оси ОХ получаем точку К соответствующую числу $\sqrt{2}$ (рис.3).

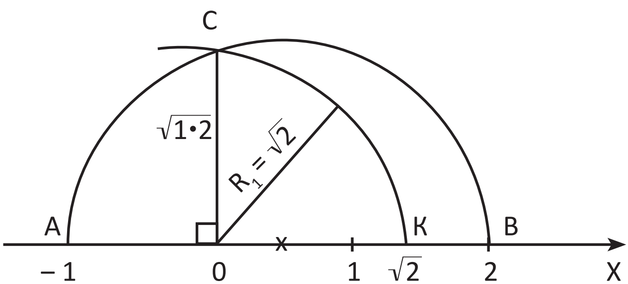

Рис. 3

Аналогично на оси OX строим точки, соответствующие числам $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... (рис.4).

Вывод. Каждому действительному числу соответствует точка на числовой оси OX и, наоборот, каждой точке на числовой оси соответствует действительное число.

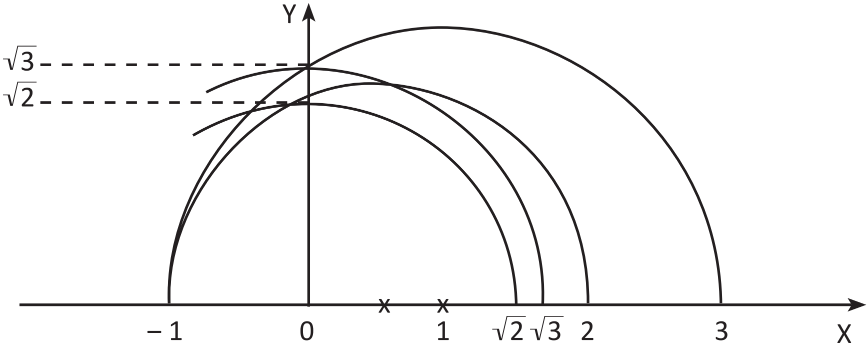

Рис. 4

б) Множество комплексных чисел.

Возникает вопрос: где располагаются точки, соответствующие комплексным числам? Обратимся к прямоугольной (или декартовой) системе координат на плоскости XOY. В этой системе координат положение точки определяется парой действительных чисел, её координатами: абсциссой и ординатой.

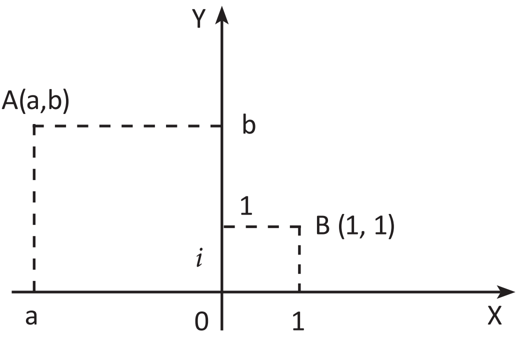

Рис. 5

Назовём ось OX – действительной осью; ось OY – мнимой осью. На мнимой оси отметим мнимую единицу i.

Тогда точке B(1, 1) будет соответствовать комплексное число $z = 1 + i$, а точке A(a, b) – $z = a + bi$.

Вывод. Каждой точке A(a, b) в декартовой системе координат XOY соответствует комплексное число $z = a + bi$ и обратно, каждому комплексному числу $z = a + bi$ соответствует точка A(a, b).

4.4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки на плоскости можно определить, указав её расстояние от начала координат (r) и углом (Θ), который образует радиус – вектор (OA) с положительным направлением оси OX. Такая система координат называется ПОЛЯРНОЙ (Рис. 6).

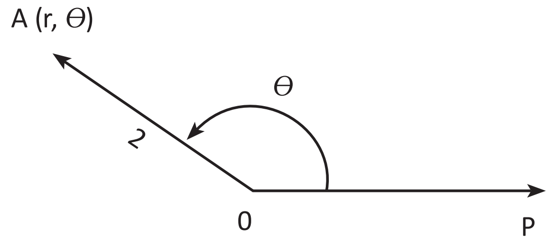

Рис. 6

OP – полярная ось; точка O – полюс; $|r|$ - модуль, расстояние точки от полюса; Θ - аргумент.

Угол Θ может быть как положительный, если вращение точки A выполняется против часовой стрелки, так и отрицательный, если точка A_1 движется по часовой стрелке.

Чтобы записать тригонометрическую форму комплексного числа достаточно параметры a и b, взятые из алгебраической формы комплексного числа, выразить через r и Θ условие (1), (2), (3).

$$z = a + bi \quad (1)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$a = r\ cos\Theta,\ b = sin\Theta \quad (3)$$

Подставим условие (2) и (3) в условие (1):

$z = r\ (cos\Theta + i\ sin\Theta)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

Упражнение 4. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2};\ z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};\ z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2};\ z_4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

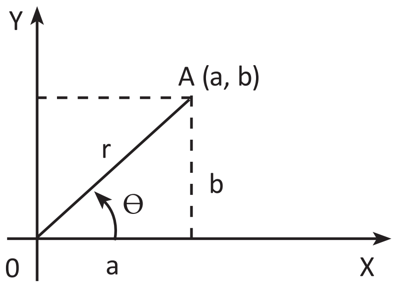

Рис. 7

Решение.

Определяем, в какой четверти расположены точки, соответствующие данным комплексным числам. Для этого можно использовать несколько вариантов.

Поскольку комплексные числа заданы в алгебраической форме, то естественно построить точки, соответствующие данным числам, в прямоугольной системе координат.

$z_1 = 2\ (cos\ 45° + i\ sin\ 45°);$

$z_2 = 2\ (cos\ 135° + i\ sin\ 135°);$

$z_3 = 2\ (cos\ 225° + i\ sin\ 225°);$

$z_4 = 2\ (cos\ 315° + i\ sin\ 315°).$

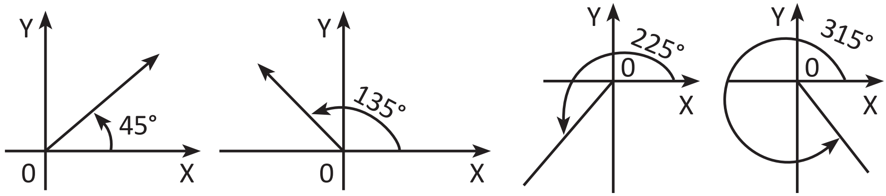

Рис. 8

Поскольку для всех точек $r = 2$, следовательно они все расположены на одной окружности. Кроме того, вся окружность разделена на четыре равные части.

Вывод. Точки, соответствующие заданным комплексным числам, являются вершинами квадрата, вписанного в окружность, радиус которой $r = 2$.

Возможен и другой способ решения задачи. Например,

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,(\cos 45° + i \sin 45°)$.

Выносится число 2, а $\frac{\sqrt{2}}{2}$ заменяется синусом и косинусом угла 45°.

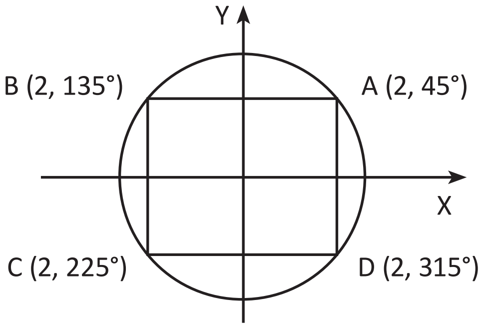

Рис. 9

4.5 Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Напомним некоторые сведения из курса тригонометрии, которые встречаются наиболее часто при действиях над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

(1) Значения тригонометрических функций от углов 30°, 45°, 60°. Составляем таблицу.

Таблица 1

1-й ряд:	1	2	3		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
2-й ряд:	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	sin →	30°	45°	60°	
3-й ряд:	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		60°	45°	30°	← cos

(2) Знаки тригонометрических функций.

Мнемоническое правило.

sin α, *cosec α* положительны по горизонтали: (1, 2 четверти);

cos α, sec α положительны по вертикали: (1, 4 четверти);

tg α, ctg α положительны по диагонали: (1, 3 четверти).

В остальных четвертях функции отрицательны.

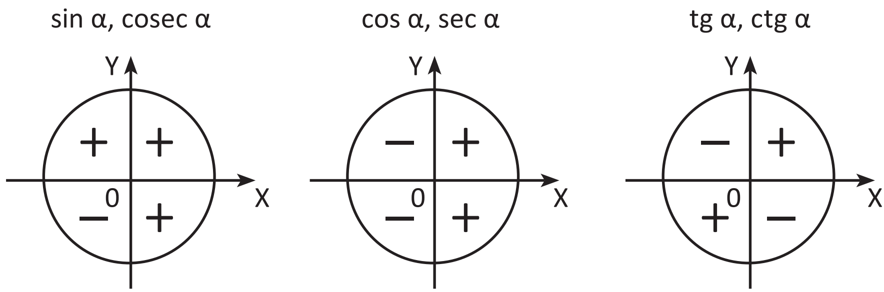

Рис. 10

(3) Формулы приведения: тригонометрические функции тупого угла приводятся к тригонометрическим функциям острого угла.

Горизонтальная ось – углы 0°, 180°; вертикальная ось – углы 90°, 270°.

Угол α прилежит к горизонтальной оси; угол β прилежит к вертикальной оси.

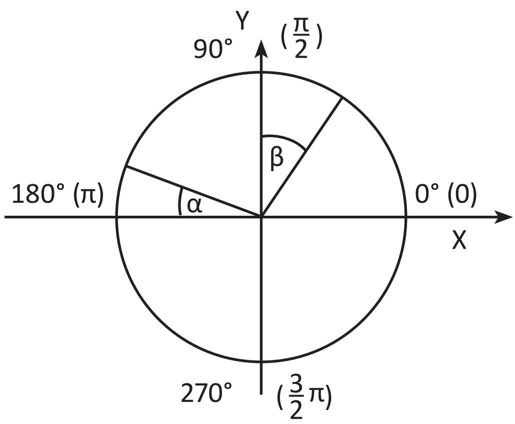

Рис. 11

Правило.

1) Если острый угол прилежит к ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ оси, то приводимая функция названия НЕ МЕНЯЕТ; если острый угол прилежит к ВЕРТИКАЛЬНОЙ оси, то приводимая функция МЕНЯЕТ название на КОФУНКЦИЮ: $sin\ \alpha$ на $cos\ \alpha$, $tg\ \alpha$ на $ctg\ \alpha$.
2) В результате ставится знак, который ИМЕЛА изначально приводимая функция.

Пример 1. Вычислить $sin\ 135°$.

$$1\text{-й вариант: } sin\ 135° = sin\ (90° + 45°) = +\ cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2\text{-й вариант: } sin\ 135° = sin\ (180° - 45°) = +\ sin\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4) Функция $y = sin\ x$ – нечётная: ; $sin\ (-x) = -sin\ x$; $y = cos\ x$ – чётная: $cos\ (-x) = cos\ x$.

(5) Формулы периодичности тригонометрических функций:

$sin\ (\alpha \pm 360°\ n) = sin\ \alpha$; $cos\ (\alpha \pm 360°\ n) = cos\ \alpha$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Пример 2. Вычислить:

1) $cos\ 300° = cos\ (360° - 60°) = cos\ (-60°) = cos\ 60° = \frac{1}{2}$;

2) $sin\ 300° = sin\ (360° - 60°) = sin\ (-60°) = -sin\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 5. Записать в алгебраической форме комплексные числа:

$z_1 = 2\ (cos\ 60° + i\ sin\ 60°)$; $z_2 = 3\ (cos\ 240° + i\ sin\ 240°)$

Решение.

$z_1 = 2\ (cos\ 60° + i\ sin\ 60°) = 2\ (\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\ \sqrt{3}$;

$z_2 = 3\ (cos\ 240° + i\ sin\ 240°) = 3\ (-\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2} - i\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 6. Написать в тригонометрической форме комплексные числа:

1) i;

2) 1;

3) –1;

4) $-1 + i$;

5) $-1 + i$.

Решение.

1) $z = i = 0 + i \cdot 1$

2) $z = 1 = 1 + 0 \cdot i$

3) $z = -1 = -1 + 0 \cdot i$

4) $z = -1 + i$

5) $z = 1 - i$

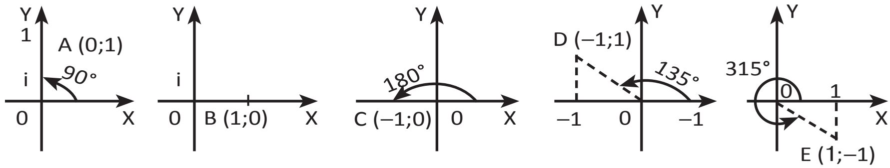

Рис. 12

Ответ:

1) $z = \cos 90° + i \cdot \sin 90°$;

2) $z = \cos 0° + i \cdot \sin 0°$;

3) $z = \cos 180° + i \cdot \sin 180°$;

4) $z = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \cdot \sin 135°)$;

5) $z = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i \cdot \sin 315°)$.

Упражнение 7. Представить числа 8 и –8 как комплексные числа, заданные в тригонометрической форме.

Решение.

Поскольку область изменения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ является интервал [–1; +1], то можно заменить тригонометрическими функциями $y = \sin x$, $y = \cos x$ только числа, взятые из этого интервала:

$$z_1 = 8 \cdot 1 = 8\,(\cos 0° + i \cdot \sin 0°)\ (r = 8,\ \Theta = 0) \text{ и}$$

$$z_2 = 8 \cdot (-1) = 8\,(\cos 180° + i \cdot \sin 180°), \text{ где } r = 8;\ \Theta = 180°.$$

4.6 Умножение комплексных чисел

Пусть $z_1 = r_1\,(cos\ \phi_1 + i\ sin\ \phi_1)$ и $z_2 = r_2\,(cos\ \phi_2 + i\ sin\ \phi_2)$.

Теорема 1. Чтобы перемножить два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, нужно перемножить их модули, а аргументы сложить.

$$z_1 \cdot z_2 = [cos\ (\phi_1 + \phi_2) + i\ sin\ (\phi_1 + \phi_2)] \qquad (1)$$

Доказательство.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,(cos\ \phi_1 + i\ sin\ \phi_1)\,(cos\ \phi_2 + i\ sin\ \phi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2\ [(cos\ (\phi_1 + i\ sin\ \phi_1)\ cos\ \phi_2 + (cos\ \phi_1 + i\ sin\ \phi_1)\ i\ sin\ \phi_2] =$$
$$= r_1 \cdot r_2\,(cos\ \phi_1\ cos\ \phi_2 + i\ sin\ \phi_1\ cos\ \phi_2 + i\ cos\ \phi_1\ sin\ \phi_2 + i^2\ sin\ \phi_1\ sin\ \phi_2 =$$
$$= r_1 \cdot r_2\ [cos\ (\phi_1 + \phi_2) + i\ sin\ (\phi_1 + \phi_2)],\ \text{ч. т. д.}$$

Использовались формулы: $sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$;
$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$.

Следствие.

Если $z_1 = z_2 = z$; $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, формула (1) принимает вид:
$z^2 = r^2(cos\ 2\ \phi + i\ sin\ 2\ \phi)$ (2)

Делаем обобщение, если имеем n равных сомножителей, то формула (1) принимает вид:

$z^n = r^n(cos\ n\ \phi + i\ sin\ n\ \phi)$ – формула Муавра.

А. Муавр – английский учёный (1667–1754 г.)

Теорема 2. Чтобы разделить два комплексных числа, нужно разделить их модули, а аргументы вычесть.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ [cos\ (\phi_1 - \phi_2) + i\ (sin\ (\phi_1 - \phi_2)] \qquad (3)$$

Доказательство.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{cos\ \phi_1 + i\ sin\ \phi_1}{cos\ \phi_2 + i\ sin\ \phi_2} = \frac{(cos\ \phi_1 + i\ sin\ \phi_1)\ (cos\ \phi_2 - i\ sin\ \phi_2)}{(cos\ \phi_2 + i\ sin\ \phi_2)\ (cos\ \phi_2 - i\ sin\ \phi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[(cos\ \phi_1\ cos\ \phi_2 + sin\ \phi_1\ sin\ \phi_2) + i\ (sin\ \phi_1\ cos\ \phi_2 - cos\ \phi_1\ sin\ \phi_2)]}{cos^2\ \phi_2 - (i\ sin\ \phi_2)^2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [cos\ (\phi_1 - \phi_2) + i\ sin\ (\phi_1 - \phi_2)],\ \text{ч. т. д.}$$

Следствие 1.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{cos\,0 + i\,sin\,0}{r\,(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)} = \frac{1}{r} \cdot [cos\,(0 - \phi) + i\,sin\,(0 - \phi)] =$$

$$= r^{-1}\,[cos\,(-\phi) + i\,sin\,(-\phi)] = \frac{1}{r}\,(cos\,\phi - i\,sin\,\phi)$$

Следствие 2.

$$z^{-n} = r^{-n}\,[cos\,(-n\,\phi) + i\,sin\,(-n\,\phi)] = \frac{1}{r^n}\,(cos\,n\,\phi - i\,sin\,n\,\phi)$$

Упражнение 8. Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.

1-й способ.

$z_1 = \sqrt{3} + i = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i) = 2\,cos\,30° + i\,sin\,30°;$

$z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i = 4\,(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 4\,(cos\,300° + i\,sin\,300°).$

$z_1 \cdot z_2 = 8\,(cos\,300° + i\,sin\,300°) = 8 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i) = 4\sqrt{3} - 4\,i.$

$cos\,330° = cos\,(360° - 30°) = cos\,(-30°) = cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sin\,330° = sin\,(360° - 30°) = sin\,(-30°) = -sin\,30° = -\,\frac{1}{2}$

2-й способ.

$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} + i)\,(2 - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + i)\,2 - (\sqrt{3} + i)\,2\sqrt{3}\,i = 4\sqrt{3} - 4$

Замечание. 2-способ проще (умножаются два комплексных числа, заданных в алгебраической форме), но первый способ красивее.

Упражнение 9. Найти $(\sqrt{3} + i)^8$

1-й способ.

Пусть $z = \sqrt{3} + i = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i) = 2\,(cos\,30° + i\,sin\,30°);$

$z^8 = 2^8\,(cos\,8 \cdot 30° + i\,sin\,8 \cdot 30°) = 256\,(cos\,240° + i\,sin\,240°) =$

$= 256\,[cos\,(180° + 60°)] = 256\,(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 128\,(-1 - i\,\sqrt{3}).$

2-й способ.

$z^8 = [(z^2)^2]^2$

Второй способ только на любителя.

4.7 Извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа и решение уравнений вида $x^n + a = 0$, где *n* – натуральное число

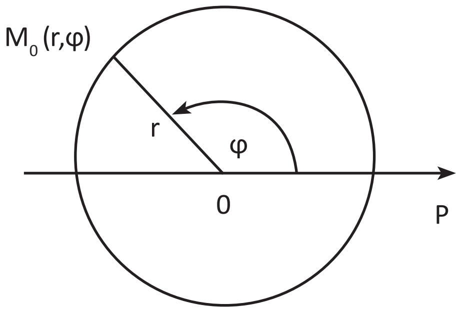

Рис. 13

$z = r\ (cos\ \phi + i\ sin\ \phi)$ (1) – тригонометрическая форма комплексного числа. В полярной системе координат комплексному числу соответствует точка $M_0\ (r, \phi)$.

Если точка M_0 движется по окружности, радиус которой r, то выполнив полный оборот, она снова займёт первоначальное положение M_0.

Следовательно, при прибавлении к аргументу $2\pi n$ мы получаем то же самое комплексное число. Поэтому формулу (1) можем записать:

$$z = cos\ (\phi + 2\pi n) + i\ sin\ (\phi + 2\pi n),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (2)$$

Извлечение корня *n*-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, выполняется по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ (cos\ \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\ sin\ \frac{\phi + 2\pi k}{n}),\ \text{где}\ k = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n} - 1. \quad (3)$$

Пример 1. Решить уравнение: $x^3 - 8 = 0$ (1)

Решение.

1-й способ.

$x^3 = 8,\ 8 \cdot 1 = 8\ (cos\ 0° + i\ sin\ 0°)$;

$x_0 = \sqrt[3]{8}\,(cos\,\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} + i\,\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3}) = 2\,(cos\,0^\circ + i\,sin\,0^\circ) = 2\,(1 + 0 \cdot i) = 2;$

$x_1 = 2\,(cos\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} + i\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3}) = 2\,(cos\,120^\circ + i\,sin\,120^\circ) = 2\,(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$= -1 + \sqrt{3};$

$x_2 = 2\,(cos\,\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} + i\,\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3}) = 2\,(cos\,240^\circ + i\,sin\,240^\circ) = -1 - i\,\sqrt{3}.$

Все три корня имеют один и тот же модуль, значит, соответствующие этим корням точки расположены на одной окружности, радиус которой равен 2, и являются вершинами правильного вписанного треугольника.

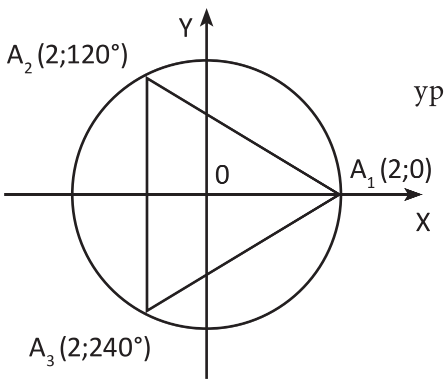

Рис. 14

2-й способ.

Раскладываем левую часть уравнения (1) на множители:

$(x - 2)\,(x^2 + 2x + 4) = 0$

$(a^3 - b^3) = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

$x - 2 = 0$ и $x^2 + 2x + 4 = 0;$

1) $x - 2 = 0,\ x_1 = 2;$

2) $x^2 + 2x + 4 = 0$, x2,3 $= -1 \pm i\,\sqrt{3}.$

Вывод: 1) Прежде чем решать уравнение, необходимо определить наиболее рациональный способ решения.

2) Не потерять корни: уравнение n-й степени имеет n корней (основная теорема алгебры).

3) Проверить, правильно ли найдены корни: если есть комплексные корни, то их число чётное, и они попарно сопряжённые.

Уравнение (1) имеет три корня: $x_1 = 2;\ x_2 = -1 + i\,\sqrt{3};\ x_3 = -1 - i\,\sqrt{3}.$

Корни x_2 и x_3 – сопряжённые: $(-1 + i\,\sqrt{3})\,(-1 - i\,\sqrt{3}) = (-1)^2 - (i\,\sqrt{3})^2 =$ $= 1 + 3 = 4.$

Пример 2. Решить уравнение: $x^4 + 4 = 0$ (1)

Решение.

$x^4 = -4;$

$-4 = 4 \cdot (-1) = 4\,(cos\,180° + i\,sin\,180°);$

$r = \sqrt[4]{(2)^2} = \sqrt{2},\ \phi = 180°.$

$$x_0 = \sqrt{2}\,(cos\,\frac{180° + 360° \cdot 0}{4} + i\,sin\,\frac{180° + 360° \cdot 0}{4}) = \sqrt{2}\,(cos\,45° + i\,sin\,45°) =$$

$$= \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i;\ A_0\,(\sqrt{2};\,45°);$$

$$x_1 = \sqrt{2}\,(cos\,\frac{180° + 360° \cdot 1}{4} + i\,sin\,\frac{180° + 360° \cdot 1}{4}) = \sqrt{2}\,(cos\,135° + i\,sin\,135°) =$$

$$= \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i;\ A_1\,(\sqrt{2};\,135°);$$

$$x_2 = \sqrt{2}\,(cos\,\frac{180° + 360° \cdot 2}{4} + i\,sin\,\frac{180° + 360° \cdot 2}{4}) = \sqrt{2}\,(cos\,225° + i\,sin\,225°) =$$

$$= \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - i;\ A_2\,(\sqrt{2};\,225°);$$

$$x_3 = \sqrt{2}\,(cos\,\frac{180° + 360° \cdot 3}{4} + i\,sin\,\frac{180° + 360° \cdot 3}{4}) = \sqrt{2}\,(cos\,315° + i\,sin\,315°) =$$

$$= \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i;\ A_3\,(\sqrt{2};\,315°).$$

Проверка. Попарно сопряжённые корни: x_0 и x_3; x_1 и x_2; $x_0 \cdot x_3 = (1 + i)\,(1 - i) = 2$; $x_1 \cdot x_2 = (-1 + i)\,(-1 - i) = 2$.

Точки A_0, A_1, A_2, A_3 – вершины квадрата вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt{2}$.

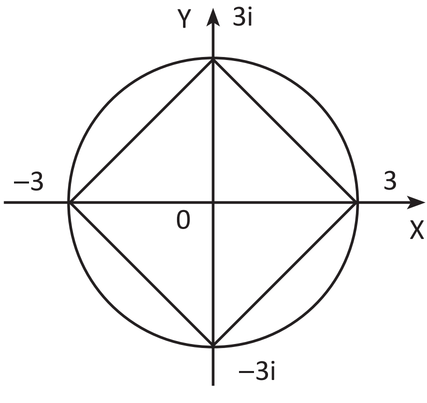

Рис. 15

Пример 3. Решить уравнение

$x^4 - 81 = 0$ (1)

Решение.

$(x^2 + 9)\,(x^2 - 9) = 0;$

$x^2 + 9 = 0 : (x + 3\,i)\,(x - 3\,i) = 0,$

$x_1 = 3\,i,\ x_2 = -3\,i$

$x^2 - 9 = 0 : (x + 3)\,(x - 3) = 0,$

$x_3 = -3,\ x_4 = 3$

Ответ. $x_1 = 3\,i,\ x_2 = -3\,i$

$x_3 = 3,\ x_4 = -3.$

4.8 Решение уравнений вида $a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a^0 = 0$, где $a \neq 0$, a_n, $a_{(n-1)}$, …, a^0 – целые числа

1. Квадратное уравнение общего вида:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0 \qquad (1)$$

Корни уравнения (1) определяются по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

2. Квадратное уравнение приведённого вида:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (3)$$

Корни квадратного уравнения приведённого вида также можно определять по формуле (2).

Например. Решить уравнение: $x^2 + x + 1 = 0$.

Решение.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Ответ. $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Рассмотрим другие способы нахождения корней квадратного уравнения приведенного вида.

Теорема 1 (Теорема Виета). Сумма корней квадратного уравнения приведённого вида равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком; произведение корней равно свободному члену.

Если x_1 и x_2 – корни уравнения (3), то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

Доказательство.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения (3), отсюда следует система уравнений:

$$-\begin{cases} x_1^2 + px + q = 0 \\ x_2^2 + px_2 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + p(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow p = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} =$$

$= -(x_1 + x_2)$, где $x_1 \neq x_2$.

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2) \\ x_1^2 - (x_1 + x_2)\, x_1 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + q = 0,\ q = x_1 \cdot x_2.$$

Вывод: $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Пример 1. Найти корни уравнения: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3.$

Пример 2. Составить квадратное уравнение по данным его корням –1, –2.

Решение. $p = -(-1-2) = 3$, $q = (-1) \cdot (-2) = 2$.

Искомое уравнение: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Если прямая задача (Пример 1) имеет единственное решение, то обратная задача (Пример 2) имеет бесчисленное количество решений, так как корни –1 и –2 имеют также все квадратные уравнения вида:

$$a\,(x^2 + 3x + 2) = 0, \text{ где } a \neq 0 \qquad (1)$$

Обозначим левую часть уравнения (1) через $f(x)$:

$$f(x) = a\,(x^2 + 3x + 2),\ a \neq 0 \qquad (2)$$

График функции (2) представляет бесчисленное множество парабол, пересекающих ось абсцисс в точках $x = -1$, $x = -2$, так как эти значения x являются корнями квадратной параболы $f(x)$ (Рис.16)

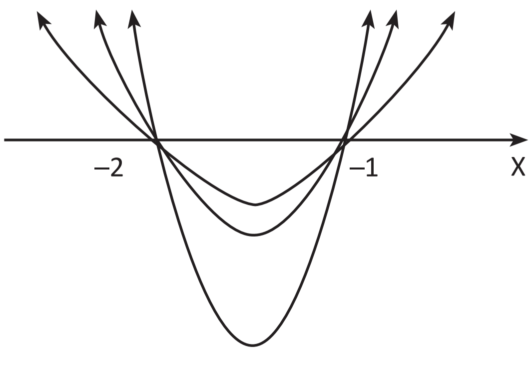

Рис. 16

Теорема 2. Если квадратное уравнение приведённого вида имеет корни x_1 и x_2, то левая часть уравнения может быть разложена на линейные множители: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Доказательство.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Отсюда: $f(x) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = (x^2 - x \cdot x_1) - (x_2 \cdot x - x_1 \cdot x_2) = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, ч. т. д.

Замечание. Квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, разлагается на множители: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, где $a \neq 0$.

Например. Разложить на множители левую часть уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad (1)$$

Решение. Определяем корни квадратного уравнения:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6},\ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1) = (3x - 2)(x - 1) \qquad (2)$$

Проверка. Если раскрыть скобки полученного разложения левой части уравнения (1), то придём к исходной функции $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

3. Кубическое уравнение вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1)

Уравнение (1) обладает свойствами, аналогичными свойствам квадратного уравнения приведённого вида $x^2 + px + q = 0$.

$a = -(x_1 + x_2 + x_3)$;

$b = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3$;

$c = -x_1x_2x_3$, где $x_1x_2x_3$ корни уравнения (1)

Пример 3. Решить уравнение: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ (2)

Решение методом понижения степени уравнения.

1) Среди целых множителей свободного члена подбираем один корень.

Обозначим левую часть уравнения (2) через $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Целые множители числа 6: ±1; ±2; ±3; ±6.

$f(1) = 4 \neq 0$ – $x = 1$ – не корень уравнения (2); $f(-1) = 0$, $x = -1$ – корень уравнения (2). Отсюда следует, что многочлен $f(x) = (x + 1)\,Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен второй степени.

2) Определяем $Q(x)$: $Q(x) = f(x) \div (x + 1)$. Параллельно разделим $f(x)$ на $(x - 1)$.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 4x^2 + x + 6 & x + 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3 + x^2} \phantom{{}+ x + 6} & x^2 - 5x + 6 \\
- & -4x^2 + x + 6 & \\
 & \underline{-5x^2 - 5} \phantom{{}+6} & \\
- & 6x + 6 & \\
 & \underline{6x + 6} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 4x^2 + x + 6 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3 - x^2} \phantom{{}+ x + 6} & x^2 - 3x - 2 \\
- & -3x^2 + x \phantom{{}+6} & \\
 & \underline{-3x^2 + 3x} \phantom{{}+6} & \\
- & -2x + 6 & \\
 & \underline{-2x + 2} & \\
 & 4 &
\end{array}
$$

Вывод: $Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $R = 0$

$Q(x) = x^2 - 3x - 2$, $R = 4$

$f(x) = (x + 1)\,Q(x) + R$, где $R = 0$

$f(x) = (x - 1)\,Q(x) + R$, где $R = 4$

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Проверка:

$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 2 + 3 = 4$;

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$;

$x_1x_2x_3 = -6$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

В общем виде:

$$f(x) = (x - a)\, Q(x) + R, \text{ если } x = a, \text{ то } R = f(a) \qquad (3)$$

Из условия (3) следует: остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен значению многочлена при $x = a$. Если $x = a$ – корень уравнения, то $R = f(a) = 0$.

Синтетический метод деления многочлена на двучлен x – a (схема Горнера)

Выписываем в первый ряд все коэффициенты при степенях x, начиная со старшей степени (если степени нет, то пишем коэффициент 0).

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	–4	1	6
–1	1	–5	6	

Во второй ряд слева от черты ставим значение a. Сносим коэффициент при старшей степени (у нас 1).

Дальнейшие коэффициенты определяем так:

$(-1) * 1 + (-4) = -5$

$(-1) * (-5) + 1 = 6$

Таким образом, в нижнем ряду получили многочлен, степени на единицу меньшую, чем исходный:

$x^2 - 5x + 6$.

Далее деление можно продолжать.

Пример 4. Решить уравнение: $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$ (1)

Решение.

1-й способ.

Общий вид уравнения (1): $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

Для решения уравнения (1) находим корень среди множителей свободного члена $\frac{a_0}{a_3}$.

Целые множители $a_0 = 2 : \pm1; \pm2$

Целые множители $a_3 = 9 : \pm1; \pm3; \pm9$

Множители $\frac{a_0}{a_3}$: $\pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{1}{9}; \pm \frac{2}{9}$

Замечание. Все множители a_0 делим последовательно на каждый множитель a_3.

$f(-2) = 0$, отсюда следует, что $x_1 = -2$ – корень.

Понижаем степень уравнения (1):

	9	18	–1	–2
–2	9	0	–1	0

$Q(x) = 9x^2 - 1$; $R = 0 \Rightarrow \pm \frac{1}{3}$. Ответ: $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$.

2-й способ. Используем метод группировки и вынесение общего множителя за скобки.

$f(x) = 9x^3 + 18x^2 - x - 2 = (9x^3 + 18x^2) - (x + 2) = 9x^2(x + 2) - (x + 2) =$
$= (x + 2)(9x^2 - 1)$;
$(x + 2)(9x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$.

Пример 5. Решить уравнение: $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (1)

Решение.

Общий вид уравнения (1) $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$

Целые множители $a_0 = 2$: $\pm 1; \pm 2$;

целые множители $a_2 = 3$: $\pm 1; \pm 3$.

Целые множители $\frac{a_0}{a_2}$: $\pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}$.

$R = f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$.

1	3	–5	2
		3	–2

$Q(x) = 3x - 2$, $R = 0$

$3x - 2 = 0$; $x = \frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{3}$

Пример 6. Решить уравнение: $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.

Решение.

$R = f(5) = 0;\ x_1 = 5$

5	1	–4	–4	–5
		5	5	5
	1	1	1	0

$Q(x) = x^2 + x + 1,\ R = 0$

$x^2 + x + 1 = 0,$

$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

Пример 7. Решить уравнение: $z^3 - 6z - 9 = 0$ (1)

Решение.

1-й способ. Понижение степени многочлена.

Пусть $f(z) = z^3 - 6z - 9;\ f(3) = 0;\ z = 3$ – корень уравнения (1).

3	1	0	–6	–9
		3	9	9
	1	3	3	0

$z^2 + 3z + 3 = 0$

$z = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$Q(z) = z^2 + 3z + 3,\ R = 0$

Ответ: $z_1 = 3;\ z_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2-й способ. Уравнение (1) решается по формуле Кардано:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} \quad \frac{p^3}{3}}} = u + v;$$

$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, где $p = -6;\ q = -9$

$\Delta = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{81}{4} - 8 = \frac{49}{4} > 0,$

$u_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 1;$

$v_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = 2;$

$z_1 = u_2 + v_1$; $z_1 = 1 + 2 = 3;$

$z_{2,\,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} i\sqrt{3}$, где u_1 и v_1 – вещественные значения корней u и v.

$z_{2,\,3} = -\frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

Пример 8. Решить уравнение: $z^3 - 12z - 16 = 0$,
где $p = -12$, $q = -16$ (1)
Решение.

$\Delta = \frac{(-16)^2}{4} - \frac{12^3}{27} = 4 \times 16 - 4 \times 16 = 0;$

$z_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{8} = 4$

$z_{2,\,3} = -2.$

Проверка.
$f(4) = 0;$

4	1	0	–12	–16
		4	16	16
	1	4	4	0

$Q(z) = z^2 + 4z + 4 = (z + 2)^2$, $R = 0;$
$(z + 2)^2 = 0 \Rightarrow z_2 = z_2 = -2.$
Ответ: $x_1 = 4$; $x_{2,3} = -2$

Пример 9. Решить уравнение: $z^3 - 12z - 8 = 0$, $p = -12$; $q = -8$ (1)

Решение.

$$\Delta = \frac{64}{4} - \frac{12^3}{27} = 16 - \frac{4^3\,3^3}{3^3} = 16 - 4^3 = 16 - 64 = -48 < 0;$$

$$\cos\phi = -\frac{q}{2} \div \sqrt{-\frac{q^3}{27}},\ \cos\phi = \frac{1}{2};\ \phi = 60°.$$

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\frac{\phi}{3};\ z_1 = 4\cos 20°;$$

$$z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} \pm 120°\right);$$

$$z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{12}{3}} \cos(20° \pm 120°) = 4\cos(20° \pm 120°).$$

Ответ: $z_1 = 4\cos 20°$; $z_{2,3} = 4\cos(20° \pm 120°)$.

Евгения Элькина

Использованная литература:

1. **Минорский В.П.** *Сборник задач по высшей математике.* – М: «Наука», 1969. – 352 с.

2. **Гангнус Р.В.** и **Гурвиц Ю.О.** *Геометрия (методическое пособие)*, ч. 1. – М: Планиметрия, 1934. – 320 с.

3. **Берман Г.Н.** *Число и наука о нём.* – М:, ГИТТЛ, 1954. – 164 с.

4. **Мышкис А.Д.** *Лекции по высшей математике.* – М: «Наука», 1967. – 640 с.

Элькина Евгения Матвеевна

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

(Методическое пособие)

АНО НИПИ «Кадастр»
150043, г. Ярославль, ул. Белинского, д. 1
info@nipik.ru
8 (4852) 75-76-46

Подписано в печать 24.12.2021
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 2,09
Бумага офсетная 80 г/м^2
Тираж 50 экз.